AG23

PROBLEME

Notations et objectifs du problème

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$ sur le corps des réels ; le produit scalaire et la norme associée sont notés $(\mid)$ et $\| \ \|$.

Étant donné un sous-espace vectoriel G de E, on note $G^{\perp}$ l'orthogonal de G dans E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est somme directe orthogonale de r sous-espaces vectoriels F_1, $F_2, \ldots, F_r$ de E si $F = F_1 \oplus F_2 \ldots \oplus F_r$ et si ces sous-espaces sont orthogonaux deux à deux.

Dans tout le problème, on suppose donnés deux sous-espaces E_1 et E_2 de E dont E est somme directe orthogonale, de dimensions respectives non nulles p et n-p.

On suppose données des bases orthonormales $B_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $B_2 = (e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ de E_1 et de E_2, dont la réunion $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ fournit une base orthonormale de E.

On désigne respectivement par I_1, I_2 et I les applications identiques de E_1, E_2 et E et par les mêmes symboles les matrices-unités associées.

On suppose données une application linéaire f de E_1 dans E_2 et une application linéaire g de E_2 dans E_1 telles que, pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de E_1 et E_2

$$(1) \qquad (f(x_1) \mid x_2) = (x_1 \mid g(x_2)).$$

L'objectif du problème est d'étudier l'endomorphisme φ de l'espace E qui, à tout élément x de E, écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ (où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$), associe

$$(2) \qquad \varphi(x) = kx_1 + f(x_1) + g(x_2),$$

où k est un nombre réel donné.

Dans la première partie, on détermine la matrice associée à φ ainsi que le noyau et l'image de cet endomorphisme φ. Dans la troisième partie, on étudie les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ dans le cas où le réel k est nul et, dans la quatrième partie, les valeurs propres et les sous-espaces propres lorsque ce réel k est non nul. La deuxième partie est consacrée à l'étude, utile pour la suite, des valeurs propres et des sous-espaces propres des applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

Partie I.

1° Matrice associée à φ.

a) Soit S la matrice associée à f dans les bases B_1 et B_2 ; déterminer en fonction de S la matrice associée à g dans ces bases B_2 et B_1.

b) Montrer que, f étant donnée, il existe une application linéaire g et une seule satisfaisant à la relation (1).

c) Exprimer, à l'aide des matrices I_1 et S, la décomposition par blocs de la matrice T associée à φ, dans la base B.

2° Étude des noyaux et des images de f et de g.

a) Montrer $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} g)^{\perp} \cap E_1$,
$\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Im} f)^{\perp} \cap E_2$.

b) En déduire que E_1 est somme directe orthogonale de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} g$. Prouver que l'injectivité de f équivaut à la surjectivité de g, et que dans ces conditions $p \leqslant n$-p.

c) Énoncer des résultats analogues pour les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} f$.

d) En utilisant *a*), exprimer $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ et $(\operatorname{Ker} g)^{\perp}$ à l'aide de $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im} f$.

3° Étude du noyau de φ.

a) On suppose $k = 0$. Exprimer le noyau $\operatorname{Ker} \varphi$ à l'aide de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Ker} g$.

b) On suppose $k \neq 0$. Déterminer le noyau de φ. Pour cela, on considèrera un élément x de $\operatorname{Ker} \varphi$, écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ et on prouvera que x_1 appartient à $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$.

4° Étude de l'image de φ.

a) Prouver que l'endomorphisme φ est symétrique.

b) En déduire $\operatorname{Im} \varphi$ à l'aide de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Im} g$.

PARTIE II. — VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DE $g \circ f$ ET $f \circ g$

Pour tout nombre réel λ, on note

$$U_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I_1 - g \circ f),$$
$$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I_2 - f \circ g),$$
$$F_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I - \varphi).$$

1° Indiquer des propriétés des valeurs propres et des sous-espaces propres F_λ de φ.

2° *a*) Montrer que $g \circ f$ est un endomorphisme symétrique de E_1 et que les valeurs propres de cet endomorphisme sont réelles et positives.

b) Étudier de même les valeurs propres de $f \circ g$.

3° Prouver les deux relations

$$U_0 = \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad V_0 = \operatorname{Ker} g$$

4° *a*) Soit λ un nombre réel *non nul*. Montrer que λ est valeur propre de $g \circ f$ si et seulement si λ est valeur propre de $f \circ g$; établir $f(U_\lambda) \subset V_\lambda$ et $g(V_\lambda) \subset U_\lambda$.

b) Démontrer que si le réel λ est une valeur propre non nulle de $g \circ f$, les deux inclusions précédentes sont des égalités.

Comparer les dimensions de U_λ et V_λ.

5° Étude d'un exemple.

On suppose $p = 3$, $n = 4$ et $S = (a, b, c)$ où a, b, c sont trois réels donnés vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f \circ g$ et de $g \circ f$ et vérifier les résultats précédemment obtenus.

PARTIE III. — VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DE φ LORSQUE $k = 0$

On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels propres F_λ de φ en fonction des sous-espaces vectoriels propres U_λ de $g \circ f$ et de V_0 ; le réel k est nul dans cette partie.

1° Exprimer F_0 à l'aide de U_0 et V_0. En déduire que φ est un automorphisme de E si et seulement si f est un isomorphisme de E_1 sur E_2.

2° On désigne par σ la symétrie de E, associée à la décomposition de E en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, définie par $\sigma(x) = x_1 - x_2$ lorsque $x = x_1 + x_2$.

a) Montrer

$$\varphi \circ \sigma = -\sigma \circ \varphi.$$

b) En déduire pour tout réel λ, $\sigma(F_\lambda) = F_{-\lambda}$.

c) En déduire que les valeurs propres non nulles de φ sont deux à deux opposées et comparer les dimensions des deux sous-espaces propres de φ correspondants.

3° Soit λ un nombre réel non nul. On note h_λ l'application de E_1 dans E définie par

$$h_\lambda(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1)\right].$$

a) Prouver que $F_\lambda = h_\lambda(U_{\lambda^2})$. (On pourra établir successivement les deux inclusions opposées).

b) Montrer que, pour tout couple (x_1, y_1) d'éléments de U_{λ^2},

$$(h_\lambda(x_1) \mid h_\lambda(y_1)) = (x_1 \mid y_1).$$

c) En déduire que λ est valeur propre de φ si, et seulement si, λ^2 est valeur propre de $g \circ f$.

4° *a*) Établir que E est somme directe orthogonale des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker} g$, $F_{\sqrt{\mu}}$ et $F_{-\sqrt{\mu}}$ où μ parcourt l'ensemble des valeurs propres non nulles de $g \circ f$.

b) On se place dans le cas particulier où f est un isomorphisme de E_1 sur E_2. Alors $n = 2p$.

On désigne par F_+ (respectivement par F_-) la somme directe des sous-espaces propres $F_{\sqrt{\mu}}$ (respectivement des sous-espaces propres $F_{-\sqrt{\mu}}$) où μ décrit l'ensemble des valeurs propres de $g \circ f$.

A partir d'une base orthonormale B'_1 de vecteurs propres de $g \circ f$, construire une base B'_+ de F_+ et une base B'_- de F_-. En déduire une base B' orthogonale de vecteurs propres de φ.

c) On se place toujours dans le cas où f est un isomorphisme de E_1 sur E_2.

Exprimer la matrice de passage Q de B à B' en fonction de la matrice de passage P de B_1 à B'_1, de la matrice S et d'une matrice D diagonale dont l'ensemble des éléments diagonaux est égal à celui des valeurs propres de $g \circ f$.

PARTIE IV. — VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DE φ LORSQUE $k \neq 0$

Dans cette partie, le réel k est différent de 0.

1° *a*) Déterminer F_0 ; à quelle condition le réel 0 n'est pas valeur propre de φ ?

b) Déterminer F_k ; à quelle condition le réel k n'est pas valeur propre de φ ?

c) Démontrer que si λ est une valeur propre de φ différente de 0 et de k, les éléments, différents de 0, de F_λ ont des composantes simultanément différentes de 0.

2° *a*) Soit λ un réel différent de 0 et de k ; établir, avec les notations de la question **III. 3°**

$$F_\lambda = h_\lambda(U_{\lambda(\lambda-k)}).$$

b) Montrer que $\frac{k}{2}$ ne peut être valeur propre et que les valeurs propres de φ vérifient des inégalités simples.

3° *a*) Exprimer $\varphi \circ \sigma + \sigma \circ \varphi$ à l'aide de σ et de I.

b) Soit λ une valeur propre de φ différente de 0 et de k.
Établir que le réel $k - \lambda$ est valeur propre de φ en montrant qu'il existe un réel a_λ tel que

$$(a_\lambda I + \sigma)(F_\lambda) \subset F_{k-\lambda}.$$

4° En déduire la liste des sous-espaces propres F_λ de φ dont la somme directe orthogonale est égale à E.

Concours Commun Mines, Ponts & chaussées
options M, P' ; 1-épreuve de 1989

Corrigé de Dany-Jack MERCIER

I.1.a Notons $S = Mat(f ; B_1, B_2) = (a_{ij})$ et $V = Mat(g ; B_2, B_1) = (b_{ij})$.

On a : $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n-p} a_{ij} e'_i$ où $e'_i \doteq e_{p+i}$, soit $B_2 = (e_{p+1}, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_{n-p})$,

et : $g(e'_j) = \sum_{i=1}^{p} b_{ij} e_i$.

Il suffit de traduire l'égalité :

$$(f(e_j) | e'_k) = (e_j | g(e'_k))$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-p} a_{ij} e'_i | e'_k\right) = \left(e_j | \sum_{i=1}^{p} b_{ik} e_i\right)$$

$$a_{kj} = b_{jk}$$

pour obtenir $V = {}^tS$.

I.1.b

Si f est donnée, de matrice S, et si g vérifie (1), alors

$$Mat(g ; B_2, B_1) = {}^tS \qquad (*)$$

g est donc unique.

Montrons que g définie par $(*)$ convient. g vérifiera par construction :

$$\forall j, k \qquad (f(e_j) | e'_k) = (e_j | g(e'_k))$$

Si $x_1 = \sum_{j=1}^{p} \xi_j e_j$ et $x_2 = \sum_{i=1}^{n-p} \eta_i e'_i$, on aura :

$$(f(x_1)|x_2) = \left(\sum_{j=1}^{p} \xi_j f(e_j) | \sum_{i=1}^{n-p} \eta_i e'_i\right) = \sum_j \sum_i \xi_j \eta_i (f(e_j) | e'_i)$$

$$= \sum_j \sum_i \xi_j \eta_i (e_j | g(e'_i)) = \left(\sum_j \xi_j e_j \mid \sum_i \eta_i g(e'_i)\right)$$

$$= (x_1 | g(x_2))$$, et g conviendra.

I.1.c Si $x \in E_1$, $\varphi(x) = kx + f(x)$

Si $x \in E_2$, $\varphi(x) = g(x)$

donc la matrice de φ dans la base $B = B_1 \cup B_2$ sera :

$$T = \begin{array}{cc} \begin{matrix} E_1 & \quad E_2 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} kI_1 & {}^tS \\ S & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \end{array}$$

I.2.a

* $x_1 \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x_1) = 0 \underset{(1)}{\Rightarrow} 0 = (x_1 | g(x_2)) \ \forall x_2 \Rightarrow x_1 \in (\operatorname{Im} g)^\perp$

montre que $\operatorname{Ker} f \subset E_1 \cap (\operatorname{Im} g)^\perp$.

Réc., si $x_1 \in E_1 \cap (\operatorname{Im} g)^\perp$, on a :

$$\forall x_i \in E_i \qquad (f(x_1) | x_2) = (x_1 | g(x_2)) = 0$$

donc $f(x_1) \in E_2 \cap E_2^\perp = \{0\}$, et $x_1 \in \operatorname{Ker} f$.

On vient de prouver que $E_1 \cap (\operatorname{Im} g)^\perp \subset \operatorname{Ker} f$.

<u>Concluons</u> : $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} g)^\perp \cap E_1$

* Les rôles de f et g étant symétriques, on aura aussi :

$$\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Im} f)^\perp \cap E_2 .$$

I.2.b

* D'après I.2.a, $\operatorname{Ker} f \subset (\operatorname{Im} g)^\perp$, donc

$$\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g \subset (\operatorname{Im} g)^\perp \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$$

D'après I.1.a, f et g ont même rang, donc

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} g = (\dim E_1 - \operatorname{rg} f) + \operatorname{rg} g = \dim E_1$$

et l'on aura bien $E_1 = \operatorname{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} g$. (*)

2^e solution :

$(\mathrm{Ker} f)^\perp \cap E_1$ est l'orthogonal de $\mathrm{Ker} f$ dans E_1, donc :

$$E_1 = \mathrm{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} \left((\mathrm{Ker} f)^\perp \cap E_1\right)$$

mais
$$\begin{aligned}(\mathrm{Ker} f)^\perp \cap E_1 &= \left((\mathrm{Im}\, g)^\perp \cap E_1\right)^\perp \cap E_1 \\ &= (\mathrm{Im}\, g \oplus E_1^\perp) \cap E_1 \\ &= (\mathrm{Im}\, g \oplus E_2) \cap E_1 = \mathrm{Im}\, g\end{aligned}$$

de sorte que l'on obtienne $E_1 = \mathrm{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, g$.

* f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\} \underset{(*)}{\Leftrightarrow} E_1 = \mathrm{Im}\, g \Leftrightarrow g$ surjective.

* Enfin, $g : E_2 \to E_1$ surjective entraine :

$$\dim E_2 = n-p \geq \dim E_1 = p$$

$$n-p \geq p$$

NB : Rappelons d'où vient le résultat " $f : E \to F$ surjective $\Rightarrow \dim F \leq \dim E$ ". On montre d'abord que si E' est un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans E, alors $f|_{E'} : E' \to \mathrm{Im} f$ est un isomorphisme. Cela entraine que $E = \mathrm{Ker} f \oplus E'$ avec $E' \simeq \mathrm{Im} f$, donc $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$ (relation bien connue !). Si f est surjective, alors $\mathrm{Im} f = F$ et cette relation entraine $\dim E \geq \dim F$.

I.2.c $E_2 = \mathrm{Ker}\, g \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im} f$, l'injectivité de g équivaut à la surjectivité de f, et dans ce cas on a $n-p \leq p$

I.2.d On rappelle la relation :

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

qui permet d'écrire :

$$(\mathrm{Ker} f)^\perp = \left((\mathrm{Im} g)^\perp \cap E_1\right)^\perp = \mathrm{Im}\, g + E_1^\perp = \mathrm{Im}\, g \oplus E_2$$

De même : $(\mathrm{Ker} g)^\perp = \mathrm{Im} f \oplus E_1$

I.3.a Comme $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, on a :

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f(x_1)}_{\in E_2} + \underbrace{g(x_2)}_{\in E_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = g(x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Ker} g$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Ker}\, \varphi = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Ker} g}$ dès que $k = 0$.

I.3.b

Si $x \in \mathrm{Ker}\, \varphi$, avec $x = x_1 + x_2$, on a :

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{k x_1}_{\in E_1} + \underbrace{f(x_1)}_{\in E_2} + \underbrace{g(x_2)}_{\in E_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k x_1 + g(x_2) = 0 \\ f(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{k} g(x_2) \in \mathrm{Im}\, g \\ x_1 \in \mathrm{Ker} f \end{cases}$$

Ainsi $x_1 \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, g$, mais $\mathrm{Ker} f = (\mathrm{Im}\, g)^\perp \cap E_1$, donc $x_1 = 0$ et l'on aura $g(x_2) = 0$, soit $x_2 \in \mathrm{Ker}\, g$. On a prouvé :

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = x_2 \in \mathrm{Ker}\, g$$

Réc., si $x \in \mathrm{Ker}\, g$, on constate que $\varphi(x) = g(x) = 0$. Donc :

$\boxed{\mathrm{Ker}\, \varphi = \mathrm{Ker}\, g}$ dès que $k \neq 0$

I.4.a La matrice de φ dans la b.o. B obtenue en I.1.c est symétrique, de sorte que l'endomorphisme φ soit symétrique.

NB : On peut le vérifier en montrant que $(\varphi(x)|y) = (x|\varphi(y))$ par le calcul ...

I.4.b

On utilise le résultat suivant concernant l'adjoint u^* d'un endomorphisme u : $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$ et $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$

Ici, φ étant symétrique, on aura :

$$\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$$

et on utilise I.3 :

<u>1er cas</u> : <u>$k=0$</u>, alors $\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g)^\perp$

$$= (\operatorname{Ker} f)^\perp \cap (\operatorname{Ker} g)^\perp$$

$$= (\operatorname{Im} g \oplus E_2) \cap (\operatorname{Im} f \oplus E_1) \quad (\text{cf I.2})$$

$$\boxed{\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Im} f}$$

<u>2e cas</u> : <u>$k \neq 0$</u>, alors $\boxed{\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker} g)^\perp = E_1 \oplus \operatorname{Im} f}$

II.1 φ est un endomorphisme symétrique, donc il existera une b.o. formée de vecteurs propres. Ainsi :

- Toutes les racines du polynôme caractéristique de φ sont réelles,
- Les sev propres de φ sont orthogonaux 2 à 2.

II.2.a $g\circ f : E_1 \to E_1$ est symétrique car :

$\forall x, y \in E_1 \quad (g\circ f(x) \mid y) = (f(x) \mid f(y)) = (x \mid g\circ f(y))$

Ainsi toutes les racines du polynôme caractéristique de $g\circ f$ seront réelles, et $g\circ f$ sera diagonalisable dans une b.o.

Si λ est une v.propre de $g\circ f$, et si x est un vecteur propre associé,

$$(g\circ f(x) \mid x) = \lambda \|x\|^2 = (f(x) \mid f(x)) = \|f(x)\|^2$$

d'où $$\lambda = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2} \geq 0.$$

II.2.b $f\circ g$ sera, comme $g\circ f$, un endomorphisme symétrique positif.

II.3 $U_0 = \mathrm{Ker}(g\circ f)$, et l'on a évidemment : $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}(g\circ f)$.

1^re solution :

$g\circ f(x) = 0 \iff f(x) \in \mathrm{Ker}\, g = (\mathrm{Im} f)^\perp \cap E_2$ (d'après I.2.a)

$\Rightarrow f(x) \in \mathrm{Im} f \cap (\mathrm{Im} f)^\perp$

$\Rightarrow f(x) = 0$

prouve bien que $\mathrm{Ker}\, g\circ f \subset \mathrm{Ker} f$.

2^e solution :

Si $g\circ f(x) = 0$, $(g\circ f(x) \mid x) = (f(x) \mid f(x)) = \|f(x)\|^2 = 0$

entraîne $f(x) = 0$, ie $x \in \mathrm{Ker} f$.

II.4.a Soit $\lambda \neq 0$. Si λ est valeur propre de $g \circ f$, notons $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ. $g \circ f(x) = \lambda x$ entraîne $f \circ g(f(x)) = \lambda f(x)$ (*)
$f(x) \neq 0$, sinon $x \in \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}\, g \circ f$ entraîne $g \circ f(x) = 0 = \lambda x$ d'où $\lambda = 0$, ce qui est absurde. (*) prouve donc que λ est une valeur propre de $f \circ g$.
On a même montré que :

$$x \in U_\lambda \Rightarrow f(x) \in V_\lambda$$

soit

$$f(U_\lambda) \subset V_\lambda$$

L'autre cas se démontre pareillement.

II.4.b

Notons f_1 (resp. g_1) la restriction de f à U_λ (resp. de g à V_λ). On a :

$$\forall x \in U_\lambda \qquad g_1 \circ f_1(x) = \lambda x$$

$$\forall y \in V_\lambda \qquad f_1 \circ g_1(y) = \lambda y$$

Donc

$$\left(\frac{1}{\lambda} g_1\right) \circ f_1 = Id_{U_\lambda}$$

$$f_1 \circ \left(\frac{1}{\lambda} g_1\right) = Id_{V_\lambda}$$

f_1 et g_1 seront donc bijectives, et l'on aura :

1) $f(U_\lambda) \subset V_\lambda$ entraîne $f(U_\lambda) = V_\lambda$
2) $g(V_\lambda) \subset U_\lambda$ " $g(V_\lambda) = U_\lambda$
3) $\dim U_\lambda = \dim V_\lambda$
4) $f_1^{-1} = \frac{1}{\lambda} g_1$

II.5 $p=3$, $n=4$, $S=(a,b,c) = \mathrm{Mat}(f\,;\,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$

On a : $\mathrm{Mat}(g\,;\,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = {}^tS = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Mat}(f\circ g\,;\,\mathcal{B}_2) = (a\ b\ c)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a^2+b^2+c^2) = (1)$$

de sorte que $f\circ g = \mathrm{Id}_{E_2}$, et $V_1 = E_2$ est une droite.

$$\mathrm{Mat}(g\circ f\,;\,\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}(a\,b\,c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$$

* Recherche des valeurs propres de $g\circ f$:

1^e solution :

$$\chi_{g\circ f}(X) = \begin{vmatrix} a^2-X & ab & ac \\ ba & b^2-X & bc \\ ca & cb & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2-X)\big((b^2-X)(c^2-X)-b^2c^2\big) - ab\big(ba(c^2-X)-abc^2\big) + ac\big(ab^2c - ca(b^2-X)\big)$$

$$= (a^2-X)(b^2-X)(c^2-X) + (a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)X - a^2b^2c^2$$

$$= -X^3 + (a^2+b^2+c^2)X^2$$

$$= -X^2(X-1)$$

Les valeurs propres de $g\circ f$ sont 0 et 1.

2^e solution : La matrice de $g\circ f$ est de rang 1, donc admet les valeurs propres suivantes :

$$\begin{cases} 0 \quad \text{avec la multiplicité } 2 \\ \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}(g\circ f\,;\,\mathcal{B}_1)) = a^2+b^2+c^2 = 1 \quad \text{avec la multiplicité } 1 \end{cases}$$

* Espaces propres de $g\circ f$?

U_0 est le plan d'équation $ax+by+cz=0$.
$U_1 = U_0^{\perp}$ (car $g\circ f$ est symétrique) sera la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

* Ccl : $f : U_1 \to V_1$ est bien un isomorphisme.

III.1 Ici $k=0$, et I.3.a s'applique :

$$F_0 = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker} g \underset{\text{II.3}}{=} U_0 \oplus V_0$$

On a :

$$\varphi \text{ automorphisme} \iff \operatorname{Ker} \varphi = \{0\} \iff U_0 = V_0 = \{0\}$$

et il s'agit de montrer le lemme ci-dessous pour conclure :

Lemme : $U_0 = V_0 = \{0\} \iff f$ est un isomorphisme de E_1 sur E_2

preuve du lemme :
$U_0 = V_0 = \{0\}$ entraîne l'injectivité de $g\circ f$ et $f\circ g$. Étant en dimension finie, cela équivaut à "$g\circ f$ et $f\circ g$ sont bijectifs".
On a :

$$\left.\begin{array}{l} f\circ g \text{ bijectif} \Rightarrow f \text{ surjectif} \\ g\circ f \text{ bijectif} \Rightarrow f \text{ injectif} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ bijectif}$$

et $f : E_1 \to E_2$ sera un automorphisme.

Réc., si $f : E_1 \to E_2$ est un isomorphisme, on aura (II.3) :

$$U_0 = \operatorname{Ker} f = \{0\}$$

D'après I.2 :

$$f \text{ injective} \Rightarrow g \text{ surjective}$$
$$f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ injective}$$

Donc g sera bijective et (II.3) :

$$V_0 = \operatorname{Ker} g = \{0\}$$

CQFD

III.2.a Simple calcul :

$$\varphi \circ \sigma(x) = \varphi(x_1 - x_2) = f(x_1) - g(x_2)$$
$$\sigma \circ \varphi(x) = \sigma(f(x_1) + g(x_2)) = -f(x_1) + g(x_2)$$

III.2.b

E_2 F_λ E_1 $F_{-\lambda}$

Si $x \in F_\lambda$,

$$\varphi(\sigma(x)) = -\sigma(\varphi(x)) = -\sigma(\lambda x) = -\lambda\, \sigma(x)$$

de sorte que $\sigma(x) \in F_{-\lambda}$

On a montré que $\sigma(F_\lambda) \subset F_{-\lambda}$

De la même manière : $\sigma(F_{-\lambda}) \subset F_\lambda$, ce qui entraîne, puisque σ est involutive :

$$F_{-\lambda} \subset \sigma(F_\lambda).$$

Conclusion : $\boxed{\sigma(F_\lambda) = F_{-\lambda}}$

III.2.c

L'égalité $\sigma(F_\lambda) = F_{-\lambda}$ montre que si λ est valeur propre de φ, $-\lambda$ le sera nécessairement, et que $\dim F_{-\lambda} = \dim \sigma(F_\lambda) = \dim F_\lambda$ (puisque σ est un automorphisme)

III.3.a

* Prouvons que $h_\lambda(U_{\lambda^2}) \subset F_\lambda$ (1)

Soit $x_1 \in U_{\lambda^2}$. On a $g\circ f(x_1) = \lambda^2 x_1$, et :

$$\varphi(h_\lambda(x_1)) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x_1) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\varphi(f(x_1))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} f(x_1) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} g\circ f(x_1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} f(x_1) + \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\cdot\lambda^2 x_1$$

$$= \lambda\, h_\lambda(x_1)$$ d'où (1)

* Prouvons que $F_\lambda \subset h_\lambda(U_{\lambda^2})$ (2)

Soit $x \in F_\lambda$. On a :

$$x \in F_\lambda \Leftrightarrow \varphi(x) = \lambda x \Leftrightarrow f(x_1) + g(x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) = \lambda x_2 \\ g(x_2) = \lambda x_1 \end{cases}$$

Il s'agit de trouver $y_1 \in U_{\lambda^2}$ tel que $x = h_\lambda(y_1)$ (3).

(3) équivaut à : $x_1 + x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y_1 + \frac{1}{\lambda} f(y_1)\right)$

et à : $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 & (4) \\ x_2 = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} f(y_1) & (5) \end{cases}$

Prenons donc $y_1 \doteq \sqrt{2}\cdot x_1$. (3) sera prouvé si (5) est vrai.
On a : $\frac{1}{\lambda\sqrt{2}} f(y_1) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}}\sqrt{2} f(x_1) = x_2$ puisque $x \in F_\lambda$. CQFD

III.3.b

$$(h_\lambda(x_1) | h(y_1)) = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1) \mid y_1 + \frac{1}{\lambda} f(y_1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((x_1|y_1) + \frac{1}{\lambda} \underbrace{(x_1 | f(y_1))}_{=0} + \frac{1}{\lambda} \underbrace{(f(x_1)|y_1)}_{=0} + \frac{1}{\lambda^2}(f(x_1)|f(y_1)) \right)$$

car $E_1 \perp E_2$

$$= \frac{1}{2}\left((x_1|y_1) + \frac{1}{\lambda^2}(x_1 | g\circ f(y_1)) \right)$$

$$= (x_1|y_1) \quad \text{car } g\circ f(y_1) = \lambda^2 y_1 \quad (\text{en effet } y_1 \in U_{\lambda^2})$$

III.3.c Les 2 questions précédentes montrent que

$$h_\lambda : U_{\lambda^2} \longrightarrow F_\lambda$$

est bijective. (a) montre la surjectivité, et b) l'injectivité)

Ainsi :

λ valeur propre de $\varphi \Leftrightarrow F_\lambda \neq \{0\} \Leftrightarrow U_{\lambda^2} \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda^2$ valeur propre de $g\circ f$

NB : On aura même $\dim U_{\lambda^2} = \dim F_\lambda$.

III.4.a φ est symétrique, donc :

$$E = F_0 \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in Sp\varphi \setminus \{0\}} F_\lambda \right)$$

où $\begin{cases} F_0 = U_0 \oplus V_0 & \text{d'après III.1} \\ Sp\varphi = \text{spectre de } \varphi = \text{ens. des valeurs propres de } \varphi \end{cases}$

On a vu que (III.3.c) :

$$\lambda \in Sp\varphi \setminus \{0\} \iff \lambda^2 \in Sp(g\circ f) \setminus \{0\}$$

de sorte que tous les éléments de $Sp\varphi\setminus\{0\}$ soient décrits par les nombres $\pm\sqrt{\mu}$ quand μ parcourt $Sp(g\circ f)\setminus\{0\}$.

On aura bien :

$$E = U_0 \oplus V_0 \oplus \left(\bigoplus_{\mu \in Sp(g\circ f)\setminus\{0\}} (F_{\sqrt{\mu}} \oplus F_{-\sqrt{\mu}}) \right)$$

III.4.b

$$F_+ = \bigoplus_{\mu\in Sp(g\circ f)\setminus\{0\}} F_{\sqrt{\mu}} \qquad F_- = \bigoplus_{\mu\in Sp(g\circ f)\setminus\{0\}} F_{-\sqrt{\mu}}$$

f est un isomorphisme, donc g aussi (cf I) et $U_0 = V_0 = \{0\}$.

On aura donc :

$$E = F_+ \oplus F_-$$

Soit $B'_1 = (e'_1, ---, e'_p)$ une b.o. de vecteurs propres de $g\circ f$.

Soit $\{\mu_1, ---, \mu_k\}$ le spectre de $g\circ f$.

III.3 montre que :

$$h_{\sqrt{\mu_i}} : U_{\mu_i} \xrightarrow{\sim} F_{\sqrt{\mu_i}}$$

$$h_{-\sqrt{\mu_i}} : U_{\mu_i} \xrightarrow{\sim} F_{-\sqrt{\mu_i}} \qquad (*)$$

sont des isomorphismes qui conservent le produit scalaire (cf III.3.b), ie des applications orthogonales.

La b.o. $B'_1 = (e'_1, \dots, e'_p)$ est formée de vecteurs appartenant aux différents U_{μ_i} $(1 \leq i \leq k)$. Si, par exemple, $(e'_1, \dots, e'_{k_1})$ forment une base o. de U_{μ_1}, alors $(h_{\sqrt{\mu_1}}(e'_1), \dots, h_{\sqrt{\mu_1}}(e'_{k_1}))$ formera une b.o. de $F_{\sqrt{\mu_1}}$ d'après $(*)$.

Il suffit de mettre les éléments de ces bases de $F_{\sqrt{\mu_1}}$ et de $F_{-\sqrt{\mu_1}}$ bout à bout pour obtenir une b.o. de E.

De façon plus précise, si l'on note $B'_1 = (e_i'^{j(i)})_{i \in \mathbb{N}_p}$,

où $e'_i \in U_{\mu_{j(i)}}$, alors :

$$B'_+ = \left(h_{\sqrt{\mu_{j(i)}}} (e_i'^{j(i)}) \right)_{i \in \mathbb{N}_p}$$

sera une b.o. de $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} F_{\sqrt{\mu_i}} \doteq F_+$.

Et : $$B' = \left(h_{\sqrt{\mu_{j(i)}}} (e_i'^{j(i)}) \right)_{i \in \mathbb{N}_p} \cup \left(h_{-\sqrt{\mu_{j(i)}}} (e_i'^{j(i)}) \right)$$

sera la b.o. cherchée de $E = F_+ \oplus F_-$.

dur **III.4.c**

* But : Exprimer $Q = P_B^{B'}$, où $B = B_1 \cup B_2$ et $B' = B'_+ \cup B'_-$, en fonction de
$$\begin{cases} P = P_{B_1}^{B'_1} \\ S = Mat(f\,;\,B_1, B_2) \\ D \text{ une matrice diagonale.} \end{cases}$$
où $B'_1 = (e'_1, \dots, e'_p)$ = bo de vecteurs propres de $g \circ f$

* On écrit :
$$Q = P_B^{B'} = P_B^{B_0} \cdot P_{B_0}^{B'}$$

où $B_0 \doteq (e'_1, \dots, e'_p, f(e'_1), \dots, f(e'_p))$ est construite à partir de la base $B'_1 = (e'_1, \dots, e'_p)$ orthogonale de vecteurs propres de $g \circ f$.
B_0 est bien une base car :
$(f(e'_1), \dots, f(e'_p))$ est une bo de E_2
En effet, $(f(e'_i) \mid f(e'_j)) = (e'_i \mid g \circ f(e'_j)) = (e'_i \mid \mu e'_j) = 0$.

* Recherche de $P_B^{B_0}$

$B = B_1 \cup B_2 = (e_1, \dots, e_n)$
$B_0 = (e'_1, \dots, e'_p, f(e'_1), \dots, f(e'_p))$

$$P_B^{B_0} = P_{B_1 \cup B_2}^{B'_1 \cup (f(e'_1), \dots, f(e'_p))} = \begin{pmatrix} P_{B_1}^{B'_1} & 0 \\ 0 & P_{B_2}^{(f(e'_1), \dots, f(e'_p))} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow B_1 \\ \updownarrow B_2 \end{matrix}$$

Comme $I_p = Mat(f\,;\,(e'_1, \dots, e'_p), (f(e'_1), \dots, f(e'_p)))$
$$= \left(P_{B_2}^{(f(e'_1), \dots, f(e'_p))}\right)^{-1} \cdot S \cdot \underbrace{P_{B_1}^{(e'_1, \dots, e'_p)}}_{= P_{B_1}^{B'_1} = P}$$

on aura : $P_{B_2}^{(f(e'_1), \dots, f(e'_p))} = SP$

donc $P_B^{B_0} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & SP \end{pmatrix}$

* Recherche de $P_{B_0}^{B'}$

$B' = B'_+ \cup B'_-$ est formée des vecteurs

$$\begin{cases} v_i = h_{\sqrt{\mu_i}}(e'_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e'_i + \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} f(e'_i)\right) \\ \text{et} \\ w_i = h_{-\sqrt{\mu_i}}(e'_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e'_i - \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} f(e'_i)\right) \end{cases}$$

donc

$$P_{B_0}^{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I & \frac{1}{\sqrt{2}} I \\ \frac{1}{\sqrt{2}} D & -\frac{1}{\sqrt{2}} D \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \text{ base } (e'_1, \dots, e'_p) \\ \updownarrow \text{ base } (f(e'_1), \dots, f(e'_p)) \end{array}$$

où $D \doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\mu_p}} \end{pmatrix}$

* Conclusion :

$$Q = P_B^{B_0} \cdot P_{B_0}^{B'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & SP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ D & -D \end{pmatrix}$$

cqfd

IV.1.a

$F_0 = \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,g$ d'après I.3.b

0 n'est pas valeur propre de φ ssi $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,g = \{0\}$, ie g injective.
D'après I.2.c, cela équivaut à dire que f est surjective.

IV.1.b

* $x \in F_k = \mathrm{Ker}\,(kI - \varphi) \iff \varphi(x) = kx$

$$\iff kx_1 + f(x_1) + g(x_2) = k(x_1 + x_2)$$

$$\iff \begin{cases} kx_1 + g(x_2) = kx_1 \\ f(x_1) = kx_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} g(x_2) = 0 \\ f(x_1) = kx_2 \end{cases} \quad (*)$$

(*) caractérise les éléments de F_k.

* Si $x \in F_k$, alors (*) entraine : $x_1 \in \mathrm{Ker}\,g\circ f \doteq U_0$

Réciproquement, si $x_1 \in U_0$, posons $x_2 = \frac{1}{k} f(x_1)$. On aura :

$$\begin{cases} g(x_2) = \frac{1}{k}\, g\circ f(x_1) = 0 \\ f(x_1) = kx_2 \end{cases}$$

donc $x = x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{k} f(x_1)$ sera dans F_k d'après (*).

* On a :

$\left.\begin{array}{l}k \text{ n'est pas valeur} \\ \text{propre de } \varphi\end{array}\right\} \iff F_k = \{0\} \underset{(a)}{\iff} U_0 = \{0\} \iff g\circ f \text{ injective} \underset{(b)}{\iff} f \text{ injective}$

preuve :

(b) provient de $\mathrm{Ker}\,g\circ f = \mathrm{Ker}\,f$ du II.3.

(a) provient des paragraphes précédents : Si $F_k \neq \{0\}$, il existe $x = x_1 + x_2 \in F_k \setminus \{0\}$ et nécessairement $x_1 \in U_0 \setminus \{0\}$ (en effet, (*) et $x_1 = 0$ entraineraient $x_2 = \frac{1}{k} f(x_1) = 0$ d'où $x = 0$. Absurde).

On a donc montré que :

$$F_k \neq \{0\} \implies U_0 \neq \{0\}$$

Réciproquement, si $U_0 \neq \{0\}$, soit $x_1 \in U_0 \setminus \{0\}$. Comme dans le dernier paragraphe, on pose $x_2 = \frac{1}{k} f(x_1)$ et l'on vérifie que

$$x \doteq x_1 + x_2 \in F_k \setminus \{0\}.$$

et (b) est démontré.

IV.1.c

Soit $\lambda \notin \{0, k\}$

$$x \in F_\lambda \iff f(x) = \lambda x \iff kx_1 + f(x_1) + g(x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$$

$$\iff \begin{cases} (k-\lambda)x_1 + g(x_2) = 0 \\ f(x_1) = \lambda x_2 \end{cases} \quad (*)$$

$(*)$ entraîne immédiatement : $\quad x_1 = 0 \iff x_2 = 0$

Ainsi, si $x \in F_\lambda \setminus \{0\}$, on aura $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$

IV.2.a

On a : $\quad x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)} \iff g \circ f(x_1) = \lambda(\lambda - k)x_1$

* Si $x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)}$, montrons que $h_\lambda(x_1) \in F_\lambda$, ie :

$$f(h_\lambda(x_1)) = \lambda h_\lambda(x_1)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1)\right)\right) = \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1)\right)$$

$$kx_1 + f(x_1) + \frac{1}{\lambda} g \circ f(x_1) = \lambda x_1 + f(x_1)$$

cette dernière équation est vraie puisque $g \circ f(x_1) = \lambda(\lambda - k)x_1$ par hypothèse.

* Réc., si $y \in F_\lambda$, on a $\varphi(y) = \lambda y$ soit :

$$k y_1 + f(y_1) + g(y_2) = \lambda (y_1 + y_2) \qquad (*)$$

et il faut trouver $x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)}$ tel que :

$$y = h_\lambda(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1)\right)$$

ie $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 \\ y_2 = \dfrac{1}{\lambda\sqrt{2}} f(x_1) \end{cases} \qquad (**)$

Définissons donc x_1 par :

$$x_1 = \sqrt{2}\, y_1$$

<u>Vérifions que $y_2 = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} f(x_1)$</u> <u>pour être certain d'avoir $(**)$</u> :

$$\frac{1}{\lambda\sqrt{2}} f(x_1) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} f(\sqrt{2} y_1) = \frac{1}{\lambda} f(y_1) = y_2 \quad \text{d'après } (*)$$

<u>Vérifions que $x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)}$, ce qui achèvera la preuve de $F_\lambda \subset h_\lambda(U_{\lambda(\lambda-k)})$.</u>

$$\begin{aligned} g\circ f(x_1) &= g(\lambda\sqrt{2}\, y_2) \\ &= \lambda\sqrt{2}\, g(y_2) \\ &= \lambda\sqrt{2}\,(\lambda y - k y_1 - f(y_1)) \quad \text{d'après } (*) \\ &= \lambda\sqrt{2}\,((\lambda-k) y_1 + \lambda y_2 - f(y_1)) \\ &= \lambda\sqrt{2}\left((\lambda-k)\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} f(x_1) - f\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right)\right) \quad \text{d'après } (**) \\ &= \lambda(\lambda-k)\, x_1 \end{aligned}$$

ie $x_1 \in U_{\lambda(\lambda-k)}$

CQFD

IV.2.b

* h_λ est injective puisque :

$$h_\lambda(x_1)=0 \iff x_1+\frac{1}{\lambda}f(x_1)=0 \implies x_1=0$$

(car $x_1\in E_1$; $f(x_1)\in E_2$ et $E=E_1\oplus E_2$)

On vient de montrer que $F_\lambda=h_\lambda(U_{\lambda(\lambda-k)})$. Ainsi, $F_\lambda\neq\{0\}$ entraine $U_{\lambda(\lambda-k)}\neq\{0\}$.
En d'autres termes, si λ est valeur propre de φ, $\lambda(\lambda-k)$ sera valeur propre de $g\circ f$. II.2.a impose alors la condition :

$$\lambda.(\lambda-k)\geq 0$$

d'où :

- Si $k>0$, $\lambda\leq 0$ ou $\lambda\geq k$
- Si $k<0$, $\lambda\leq k$ ou $\lambda\geq 0$

* Si $\lambda=\frac{k}{2}$ ne sera jamais une valeur propre de φ puisque n'est jamais à l'extérieur de l'intervalle d'extrémités 0 et k.

IV.3.a

$$\begin{aligned}
\varphi\circ\sigma+\sigma\circ\varphi(x) &= \varphi(x_1-x_2)+\sigma(kx_1+f(x_1)+g(x_2))\\
&= kx_1+f(x_1)-g(x_2)+kx_1-f(x_1)+g(x_2)\\
&= 2kx_1\\
&= k(x+\sigma(x))\\
&= k(I+\sigma)(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\varphi\circ\sigma+\sigma\circ\varphi=k(I+\sigma)}$

IV. 3, b

* On cherche a_λ tel que $(a_\lambda I + \sigma)(x) \in F_{k-\lambda}$ pour tout $x \in F_\lambda$.

On a :

$$\varphi((a_\lambda I + \sigma)) = a_\lambda \varphi + \varphi \circ \sigma$$
$$= a_\lambda \varphi + k(I+\sigma) - \sigma \circ \varphi$$

d'où :

$$\varphi(a_\lambda I + \sigma)(x) = a_\lambda . \lambda x + k(I+\sigma)(x) - \sigma(\lambda x)$$
$$= (\lambda a_\lambda + k)x + (k-\lambda)\sigma(x)$$

On désire que cela soit égal à $(k-\lambda)(a_\lambda x + \sigma(x))$, ce qui revient à choisir a_λ tel que :

$$\lambda a_\lambda + k = (k-\lambda) a_\lambda$$
$$a_\lambda = \frac{k}{k-2\lambda}$$

C'est possible car $\frac{k}{2}$ ne peut être valeur propre de φ (IV.2.b).

* Alors, si $a_\lambda I + \sigma$ est injectif,

$\left.\begin{array}{l}\lambda \text{ valeur propre} \\ \text{de } \varphi \text{ autre que } 0 \\ \text{et } k\end{array}\right\} \Leftrightarrow F_\lambda \neq \{0\} \Rightarrow (a_\lambda I + \sigma)(F_\lambda) \neq \{0\} \subset F_{k-\lambda}$

$\Rightarrow F_{k-\lambda} \neq \{0\}$

$\Rightarrow k-\lambda$ val. propre de φ.

L'injectivité de $a_\lambda I + \sigma$ se montre facilement :

$(a_\lambda I + \sigma)(x) = 0 \Leftrightarrow a_\lambda(x_1 + x_2) + x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow (a_\lambda + 1)x_1 = 0 = (a_\lambda - 1)x_2$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

car $a_\lambda \neq \pm 1$ (en effet, $a_\lambda = \pm 1 \Rightarrow \frac{k}{k-2\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \lambda \in \{0, k\}$ est exclu)

IV.4

Les sev propres de φ sont les $F_\lambda = h_\lambda(U_{\lambda(\lambda-k)})$ où $U_{\lambda(\lambda-k)} \neq \{0\}$.
Ils sont donc obtenus à partir des valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ de $g \circ f$ en résolvant les équations :

$$\mu_i = \lambda(\lambda - k) \qquad (*)$$

On trouve : $$\lambda = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4\mu_i}}{2}$$

Si λ_i est l'une des racines de $(*)$, l'autre sera $k - \lambda_i$, et l'on a vu que :

$$(a_\lambda I + \sigma)(F_\lambda) \subset F_{k-\lambda} \qquad (\text{IV}.3.b)$$

Comme $a_\lambda I + \sigma$ est injective, on aura $\dim F_\lambda \leq \dim F_{k-\lambda}$, et même $\dim F_\lambda = \dim F_{k-\lambda}$ par symétrie. Chacune des racines λ_i et $k - \lambda_i$ de $(*)$ donneront naissance à un espace propre F_{λ_i} ou $F_{k-\lambda_i}$ de φ.

<u>Ccl</u> : Les sev propres de φ seront

F_0 si g n'est pas injective (IV.1.a)

F_k si f " " (IV.1.b)

F_{λ_i} et $F_{k-\lambda_i}$, de m̂ dimension, pour $\lambda_i = \dfrac{k + \sqrt{k^2 + 4\mu_i}}{2}$ et $1 \leq i \leq \ell$

FIN